Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Notations. — Si $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, on notera

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

le produit scalaire usuel, et

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$$

la norme euclidienne associée. On considérera $\mathbf{R}^n$ muni de la topologie associée à cette norme.

On identifiera dans certaines questions, les éléments de $\mathbf{R}^n$ avec des matrices colonnes.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, on note $\|A\|$ la norme de l'application linéaire associée à A, norme définie par

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\| ;\ x \in \mathbf{R}^n,\ \|x\| \leqslant 1\} .$$

Dans tout le problème U désignera une partie *convexe fermée non vide* de $\mathbf{R}^n$.

I

1° Soit x dans $\mathbf{R}^n$. Montrer l'existence de u dans U tel que

(1) $$\forall\, y \in U, \qquad \|x-u\| \leqslant \|x-y\| .$$

2° Montrer que l'élément u de U vérifiant (1) est unique. On notera $P(x)=u$ cet unique élément.

3° Montrer que $u=P(x)$ si et seulement si u est dans U et $\langle x-u, y-u \rangle \leqslant 0$ pour tout y de U.

4° Vérifier que $\|P(x)-P(x')\| \leqslant \|x-x'\|$, pour tous x et x' de $\mathbf{R}^n$.

Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n, à coefficients réels, telle que :

$$\forall\, v \in \mathbf{R}^n, \qquad \langle Av, v \rangle \geqslant 0 .$$

Soit f un élément fixé de $\mathbf{R}^n$, on considère l'application J de $\mathbf{R}^n$ dans R définie par

(2) $$J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle f, v \rangle .$$

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathfrak{L}$ des éléments u de U tels que

(3) $$\forall\, v \in U, \qquad J(u) \leqslant J(v),$$

(c'est-à-dire l'ensemble des éléments u de U où la fonction J atteint son minimum.)

A

1° Montrer que $\mathfrak{L}$ est un convexe fermé (éventuellement vide), de $\mathbf{R}^n$.

2° Montrer que u est dans $\mathfrak{L}$ si et seulement si u est dans U et $\langle Au-f, v-u \rangle \geqslant 0$ pour tout v de U.

3° Que représente $Av-f$ pour la fonction J ? (La résolution de cette question n'est pas nécessaire pour la suite du problème.)

B

On suppose dans cette partie que pour tout v de $\mathbf{R}^n$, v non nul, on a $\langle Av, v \rangle > 0$.

1° Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout v de $\mathbf{R}^n$, on ait $\langle Av, v \rangle \geqslant \alpha \|v\|^2$.

2° Montrer que $\mathfrak{L}$ est non vide. Est-il réduit à un seul élément ?

.../...

3° Soit u_0 dans U. On pose pour $m \in \mathbf{N}$,

$$u_{m+1} = P\left(u_m - \rho(Au_m - f)\right) ,$$

où ρ est un réel qui sera déterminé par la suite, et P l'application définie au I, 2°.

a. Trouver une constante $k \geqslant 0$, telle que pour tout m de N on ait $\| u_{m+2} - u_{m+1} \| \leqslant k \| u_{m+1} - u_m \|$.

b. En déduire l'existence de $\rho_0 > 0$, tel que, si on prend ρ dans $]0, \rho_0[$ la suite $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ ainsi construite soit convergente.

Montrer que sa limite appartient à $\mathfrak{T}$.

C

On suppose dans cette partie que U est de plus bornée, et que pour tout v de $\mathbf{R}^n$ on a $\langle Av, v \rangle \geqslant 0$.

1° Montrer que $\mathfrak{T}$ est non vide. Est-il réduit à un seul élément ?

2° On construit comme en B, 3°, une suite $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$, en fixant u_0 dans U et en posant

$$u_{m+1} = P\left(u_m - \rho(Au_m - f)\right) ,$$

ρ étant un réel à fixer ultérieurement.

a. Montrer que

$$J(u_{m+1}) - J(u_m) = \langle Au_m - f , u_{m+1} - u_m \rangle + \frac{1}{2} \langle A(u_{m+1} - u_m), u_{m+1} - u_m \rangle .$$

b. Établir l'inégalité

$$\rho \langle Au_m - f, u_{m+1} - u_m \rangle + \| u_{m+1} - u_m \|^2 \leqslant 0 .$$

c. Montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$, tel que si on fixe ρ dans $]0, \rho_0[$ la suite $\left(J(u_m)\right)_{m \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Montrer alors que $\lim_{m \to +\infty} (u_{m+1} - u_m) = 0$.

d. Comment peut-on utiliser la suite $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ pour trouver des éléments de $\mathfrak{T}$?

3° On construit une autre suite $(w_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de la manière suivante. On fixe w_0 dans U, et si w_m est connu, on détermine w_{m+1} comme suit.

a. On choisit v_m dans U tel que

$\langle Aw_m - f , v_m \rangle \leqslant \langle Aw_m - f , v \rangle$, pour tout v de U .

Montrer l'existence de v_m.

b. Soit ρ un réel strictement positif qui sera fixé ensuite. On pose

$$\rho_m = \inf\{1, -\frac{1}{\rho} \langle Aw_m - f , v_m - w_m \rangle\}$$

et

$$w_{m+1} = w_m + \rho_m (v_m - w_m) .$$

Montrer que w_{m+1} est dans U. Que peut-on dire si $\rho_m = 0$?

c. Soit d le diamètre de U. Prouver que pour ρ assez grand, on a l'inégalité

$$J(w_{m+1}) \leqslant J(w_m) - \frac{1}{\rho^2} \left(\rho - \frac{d^2}{2} \|A\|\right) (\langle Aw_m - f, v_m - w_m \rangle)^2 .$$

d. Comment peut-on utiliser la suite $(w_m)_{m \in \mathbf{N}}$ pour trouver des éléments de $\mathfrak{T}$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail